

Aufgabe 0: Nullstellen

Die Funktionen $f(x) = (x - 1)(x + 3)(x - 4)$, $g(x) = 3x^3 - 6x^2 + 3x - 6$ und $h(x) = 3x^3 - 9x$ seien gegeben.

- Welchen Grad hat die Funktion f .
- Bestimme die Nullstellen von f auf möglichst einfache Weise.
- Weist die Funktion g eine einfache Symmetrie auf?
- Welche Nullstellen hat die Funktion h ?
- Bestimme den Schnittpunkt von g mit der y -Achse.
- Überprüfe möglichst schnell, ob die Wendetangente von g durch die Gleichung $t(x) = \frac{2}{3}x + 4$ beschrieben werden kann.
- Bestimme die Gleichung der Wendetangente von g und die Gleichung der „Wendenormalen“ von g .
- Gebe den Steigungswinkel der Wendetangente von g an.
- Bestimme eine beliebige Gerade, welche parallel zur Wendetangente von g ist.

Aufgabe 1: Kurvendiskussion und ein Dreieck

- Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3$ bzgl. Symmetrie, Nullstellen, relative Extrempunkte, Wendepunkte, Monotonieverhalten. Anschließend skizziere den Graphen von f für x -Werte im Intervall $[-3; 2]$

Teilkontrollergebnisse: $f'''(x) = 12x + 6$; $W(-1 | -0,5)$

- Die Wendetangente von W , die x -Achse und die y -Achse bilden ein Dreieck. Bestimme die Gleichung der Wendetangente und bestimme rechnerisch den Flächeninhalt des Dreiecks.

Aufgabe 2: Das Museum

Eine Grafik gibt die Zahl der Besucher in einem Museum während der Öffnungszeiten zwischen 11:00 Uhr und 18:00 Uhr an. Die zugehörige Funktion lautet $f(x) = -10x^3 + 295x^2 - 2035x$. Hierbei entspricht x der Uhrzeit und $f(x)$ der Besucheranzahl, die sich zum Zeitpunkt x im Museum befinden.

- Berechne, wie viele Besucher sich um 12:00 Uhr im Museum befinden.
- Christian ist Mitarbeiter im Museum. Um 19:00 ist er mit Freunden in einer Bar verabredet. Christian hat leider erst dann Feierabend, wenn alle Besucher das Museum verlassen haben. Um 17:30 Uhr weist er die Besucher freundlich darauf hin, dass das Museum um 18:00 schließt. Bestimme rechnerisch, ob er es rechtzeitig zu dem Treffen schafft, wenn er vom Museum bis zur Bar 35min braucht.
- Um welche Uhrzeit befinden sich die meisten Besucher im Museum?
- Wie viele Besucher werden zwischen 11:30 und 12:30 Uhr durchschnittlich pro Stunde in das Museum eingelassen? (etwas unrealistisch gehen wir davon aus, dass in diesem Zeitraum kein Besucher das Museum verlässt.)
- Wie groß ist der Besucherandrang (pro Stunde) wenn das Museum öffnet?

Aufgabe 3: Funktionenschar

Die Funktionenschar $f_a(x) = ax^3 - 3x^2$ stellt für unterschiedliche Werte von a unterschiedliche Funktionen dar. Wie muss der Parameter a gewählt werden, wenn f_a an der Stelle $x = 2$ eine Extremstelle vorliegen soll? Ist diese Extremstelle dann ein relatives Minimum oder ein relatives Maximum?

Aufgabe 4: Das Segelflugzeug

Die Flughöhe eines Segelflugzeugs in einer dreistündigen Flugphase wird durch die Funktion

$$h(t) = \frac{1}{1000}t^3 - 0,18t^2 + 6t + 400$$

modelliert. (t in Minuten, $h(t)$ in Metern)

Die Funktion ist also eingeschränkt auf das Intervall $[0; 180]$

- Berechne die in dieser Flugphase erreichte größte bzw. geringste Höhe.
- Zu welchem Zeitpunkt hat das Flugzeug den größten Höhenverlust?

Aufgabe 5: Multiple-Choice

Bewerte folgende Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt

- Jede ganzrationale Funktion dritten Grades hat genau einen Wendepunkt.
- Es gibt eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit einer Wendestelle bei $x = 2$ und zwei rel. Extrema bei $x = 4$ und $x = 1$.
- Es gibt eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit zwei Sattelpunkten.
- Eine Transformation bzgl. der y -Achse verschiebt die x -Koordinate des Wendepunkts.
- Gilt $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$, so liegt an der Stelle x kein rel. Extremum vor.
- Gilt $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$, so liegt an der Stelle x ein rel. Minimum vor.

Aufgabe 6: Ansätze

Die Funktion $v(t)$ ist unbekannt. Sie soll aber die Geschwindigkeit eines Rennautos in Abhängigkeit von der Zeit angeben.

- Durch welchen mathematischen „Ausdruck“ kann die Durchschnittsbeschleunigung im Intervall $[3; 5]$ angegeben werden?
- Durch welchen mathematischen „Ausdruck“ kann die Beschleunigung zum Zeitpunkt t angegeben werden?

Da das Rennauto nur 120min für seine Fahrt benötigt, ist die Funktion v auf ein Intervall eingeschränkt.

- Gebe ein sinnvolles Intervall an.
- Wie sieht der Ansatz aus, wenn nach der höchsten und nach der geringsten Beschleunigung gefragt ist?
- Wie sieht der Ansatz aus, wenn nach der höchsten und nach der geringsten Geschwindigkeit gefragt ist?
- Warum müssen die Randgrenzen berücksichtigt werden?

Aufgabe 7: Graphisches

- Beschreibe dein Vorgehen beim graphischen Auf- und Ableiten. Auf welche Stellen musst du achten?
- Skizziere 4 beliebige Graphen. Leite 2 graphisch auf, und 2 ab.

Skizziere 2 beliebige Graphen und formuliere Aussagen, wie z.B.: Auf $[0; 2]$ ist die Funktion streng monoton steigend usw., der Graph ist pktsymmetrisch, achsensymmetrisch usw..

Aufgabe 8: Transformationen

Die Funktion $f(x)$ hat an der Stelle $x = 2$ ein rel. Extremum und an der Stelle $x = 5$ eine Wendestelle. Es soll nun jeweils eine neue Funktion $g(x)$ durch eine Transformation von f entstehen.

- Eine Verschiebung auf der x -Achse um 2 Einheiten nach rechts.
- Eine Verschiebung auf der x -Achse um 5 Einheiten nach links.
- Eine Streckung/Stauchung bzgl. der y -Achse um den Faktor 0,5? Ist es eine Streckung oder eine Stauchung?
- Eine Streckung/Stauchung bzgl. der x -Achse um den Faktor 0,5? Ist es eine Streckung oder eine Stauchung?

Aufgabe 9:

Durch die Gleichung $v(t) = t^3 - 9t^2 + 27t + 4$ ist eine Geschwindigkeitsfunktion im Intervall $[0; 5]$ gegeben. Dabei wird t in s und v in km/h gemessen.

- Wie groß ist die Geschwindigkeit nach 2 Sekunden?
- Zu welchem Zeitpunkt ist die Geschwindigkeit maximal? Zu welchem Zeitpunkt ist sie minimal? Wie groß sind maximale bzw. minimale Geschwindigkeit?
- Zu welchem Zeitpunkt ist die Beschleunigung maximal? Zu welchem Zeitpunkt ist sie minimal? Wie groß sind maximale bzw. minimale Beschleunigung?